

Gravitation und Kosmologie

II: Friedmann-Lemaître-Modelle

Claus Kiefer

Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln



Inhalt von Teil II

Beobachtungen

Das Kosmologische Prinzip

Friedmann-Lemaître-Gleichungen

Eine kurze Geschichte des Universums

Ein Blick in das frühe Universum



Abbildungsnachweis: NASA

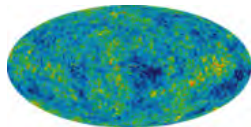
Warum ist es nachts dunkel?

Kepler an Galilei 1610:

Wenn das wahr ist, und wenn jene Sonnen von gleicher Beschaffenheit sind wie die unsrige, weshalb übertreffen dann alle jene Sonnen insgesamt an Glanz nicht unsere Sonne?

Wichtige Beobachtungen

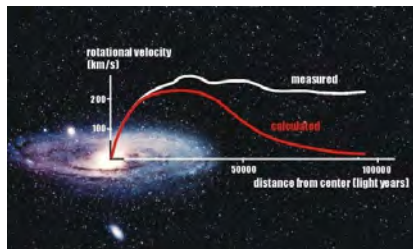
- ▶ Dunkelheit des Nachthimmels
(Das Universum expandiert und hat ein endliches Alter)
- ▶ Rotverschiebung der Galaxien und Supernovae
(Das Universum expandiert)
- ▶ Spektrum der Kosmischen Hintergrundstrahlung
(Das frühe Universum war heiß)



- ▶ Großräumige Verteilung der Struktur
(Galaxien und Galaxienhaufen)
- ▶ Häufigkeit der leichten Elemente im Universum
(Wasserstoff, Helium, Lithium, . . .)

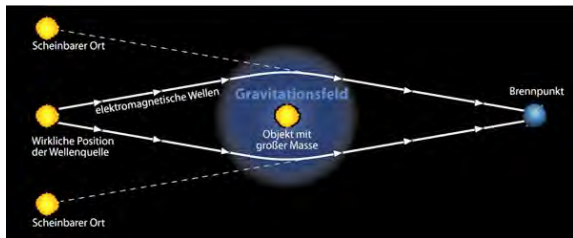
Dunkle Materie

- ▶ **Fritz Zwicky** (1933): Der Coma-Haufen kann nicht alleine durch die Gravitationswirkung der sichtbaren Sterne zusammengehalten werden
- ▶ **Vera Rubin** (seit 1960): Die Umlaufgeschwindigkeit der sichtbaren Materie ist zu groß, um gravitativ an die Galaxienhaufen gebunden sein zu können



Gravitationslinsen

Die Lichtgewegung unterliegt der Geometrie von Raum und bewegt sich deshalb auf „gekrümmten Bahnen“. Das Gravitationsfeld wirkt wie ein Medium mit raumzeitlich veränderlichem Brechungsindex, der unabhängig von der Wellenlänge ist.



Quelle: Wikipedia

Galaxienhaufen Abell 1689



Abbildung: Der rund 2,2 Milliarden Lichtjahre entfernte Galaxienhaufen Abell 1689 wirkt als Gravitationslinse; er enthält Dunkle Materie und erlaubt die Messung der Dunklen Energie

Bullet-Cluster

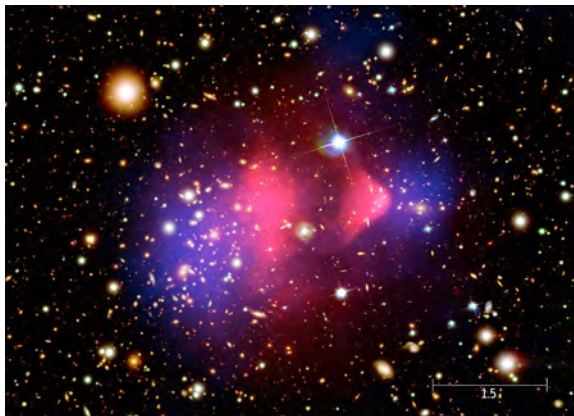
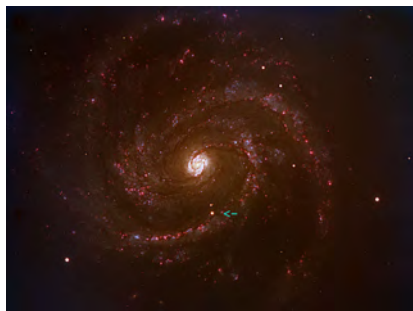


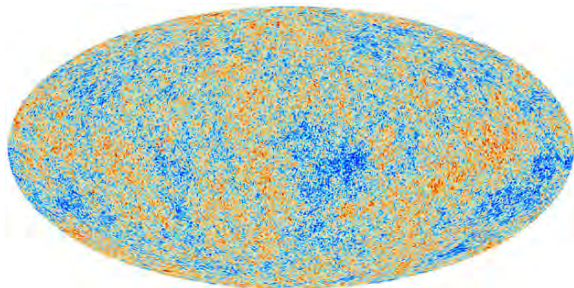
Abbildung: Pink: Vom Chandra-Teleskop aufgenommene Röntgenstrahlung; blau: aus Gravitationslinseneffekten berechnete Massenverteilung

Kosmologische Beobachtungen I: Die Rotverschiebung ferner Galaxien



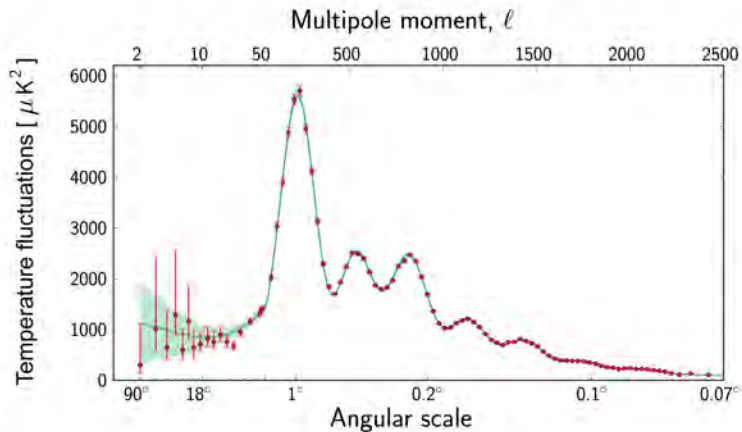
Alle nicht zu nahen Galaxien „bewegen sich von uns weg“. Dies ist Ausdruck der **Expansion des Universums**. Rotverschiebungen werden am besten durch die Beobachtung von Supernovae des Typs Ia bestimmt (Nobelpreis 2011).

Kosmologische Beobachtungen II: Die Kosmische Hintergrundstrahlung (CMB)



Das Universum ist von einer thermischen Strahlung mit $T = 3$ Kelvin erfüllt, die ungefähr gleichförmig ist, aber kleine Anisotropien aufweist. Sie zeugt von einer heißen Phase des frühen Universums.

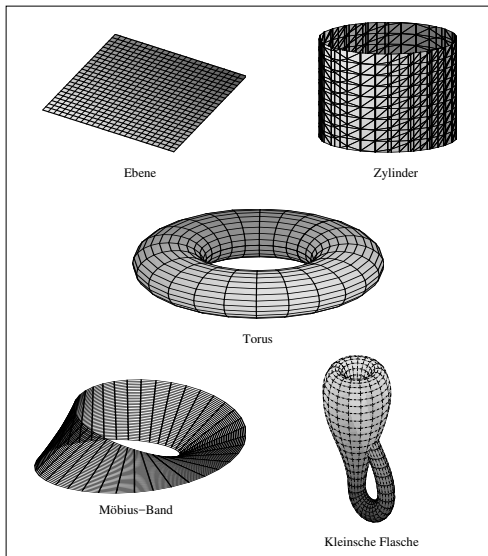
Spektrum der Anisotropien



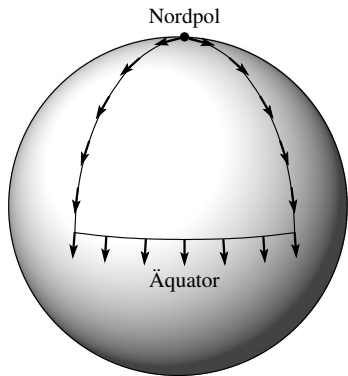
Kosmologisches Prinzip (Einstein 1931): „Alle Stellen des Universums sind gleichwertig; im speziellen soll also auch die örtlich gemittelte Dichte der Sternmaterie überall gleich sein.“¹

Aus der beobachteten Isotropie (gleicher Anblick in alle Richtungen) von der Erde aus (CMB) und dem Kosmologischen Prinzip folgen auf sehr großen Skalen die Isotropie **um jeden Punkt** und mittels eines mathematischen Theorems (F. Schur 1886) die Homogenität (Gleichförmigkeit) des Raumes.

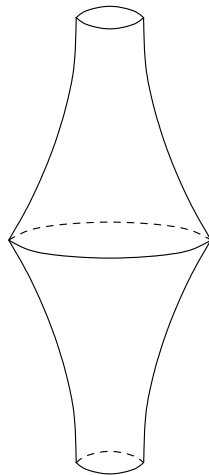
¹1917 forderte Einstein noch das „vollkommene Kosmologische Prinzip“: Räumliche Struktur und Dichte sollen räumlich und zeitlich konstant sein.



Die fünf möglichen flachen Räume in zwei Dimensionen



(a) Kugeloberfläche



(b) Pseudosphäre

Robertson–Walker metric

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Albert Einstein (1915)

Cosmological Principle: Choose, to first order, a homogeneous and isotropic metric for space,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \mathcal{K}r^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

- ▶ $\mathcal{K} = 0, +1, -1$
- ▶ $a(t)$ scale factor
- ▶ $H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ Hubble parameter

Kosmische Rotverschiebung

Licht der Wellenlänge λ_s , das zur Zeit t_s ausgesandt wird, erreicht uns heute mit der Rotverschiebung ($z := \frac{\lambda_0 - \lambda_s}{\lambda_s}$)

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t_s)}$$

(Details an der Tafel)

Entfernungsmaße

Das wichtigste Maß ist die **Leuchtkraftentfernung**

$$d_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi l}},$$

wobei l der beobachtete Energiefluß und L die Leuchtkraft der Quelle sind. Aus der Robertson-Walker-Metrik folgt die Reihenentwicklung

$$d_L(z) = \frac{z}{H_0} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z + \dots \right),$$

wobei $q_0 := -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}^2}$ der **Verzögerungsparameter** ist. Der dominierende Term ist das **Hubble-Gesetz**.



A. Friedmann

(c) Alexander Friedmann
(1888–1925)



(d) Georges Lemaître
(1894–1966)

Abbildung: Pioniere der Kosmologie

Friedmann–Lemaître equations

Energy–momentum tensor (from now on, $c = 1$):

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + p g_{\mu\nu}$$

This corresponds to an **ideal fluid**.

Inserting the metric and the energy–momentum tensor into the Einstein equations gives the **Friedmann–Lemaître equations**,

$$\begin{aligned}0 &= \dot{\rho} + 3H(\rho + p) \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\mathcal{K}}{a^2} \\ \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}a(\rho + 3p)\end{aligned}$$

- ▶ $\Omega(t) := \frac{\rho}{\rho_c}$ **Ω -parameter** $1 - \Omega = -\frac{\mathcal{K}}{(aH)^2}$
- ▶ $\rho_c(t) := \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$ **critical density**

Hubble-Parameter

- ▶ Hubble-Konstante: $H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \equiv 100 h \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$
- ▶ Hubble-Länge: $cH_0^{-1} \approx 3 h^{-1} \text{ Gpc}$
- ▶ PLANCK-Kollaboration (2015): $H_0 = (67.74 \pm 0.46) \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$,
i.e. $h \approx 0.68$ and $cH_0^{-1} \approx 4.4 \text{ Gpc}$
- ▶ Weltraumteleskop HUBBLE (Riess *et al.* 2016):
 $H_0 = 73.24 \pm 1.74 \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$

(Mehr Details zu den Friedmann-Lemaître-Gleichungen an der Tafel)

Parameter unseres Universums

PLANCK-Kollaboration (2015):

- ▶ $H_0 = (67.74 \pm 0.46) \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$
- ▶ $\Omega_{\text{m},0} \approx 0.314 \pm 0.020$
- ▶ $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.686 \pm 0.020$
- ▶ $\Omega_{\text{r}} \approx 4.15 \times 10^{-5} h^{-2} \approx 10^{-4} \ll 1$
- ▶ $w_{\Lambda} = -1.13^{+0.23}_{-0.25}$

Λ CDM-Modell

Ein konsistentes Bild unseres Universums

- ▶ Das Universum ist etwa **13,82 Milliarden Jahre** alt;
- ▶ es expandiert mit einer Rate von etwa **67 Kilometer pro Sekunde und Megaparsec**;
- ▶ es expandiert heute mit einer positiven Beschleunigung;
- ▶ es ist räumlich ungefähr flach;
- ▶ es besteht hauptsächlich aus:
 - ▶ 68,3 % Dunkler Energie
 - ▶ 26,8% Dunkler exotischer (nichtbaryonischer) Materie
 - ▶ 4,9 % normaler (baryonischer) Materie
 - ▶ Kleinen Mengen von Strahlung und Neutrinos

Die Vergangenheit des Universums

von null bis 10^{-43} Sekunden Quantengravitation

zwischen ca. 10^{-34} und 10^{-32} Sekunden Beschleunigte Expansion („Inflation“)

10^{-6} Sekunden Erzeugung der Baryonen (vor allem Protonen und Neutronen); es gibt ein wenig mehr (ca. 10^{-9}) Baryonen als Antibaryonen

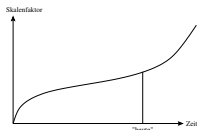
1 Sekunde Vernichtung der Antimaterie

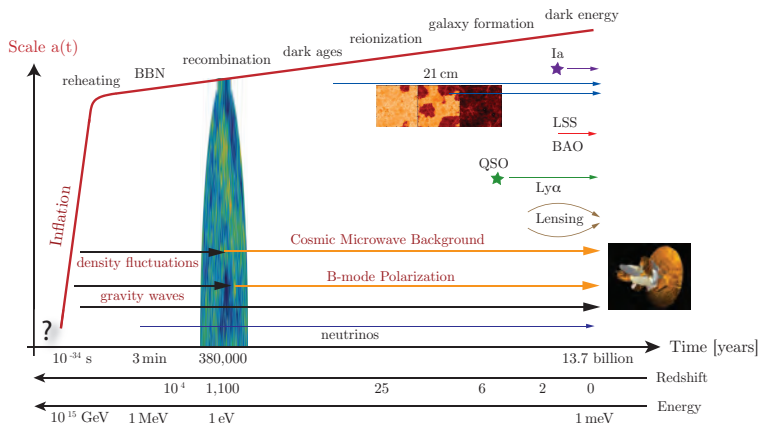
1 Sekunde bis 3 Minuten Entstehung der leichten Elemente

380 000 Jahre Entkopplung von Strahlung und Materie

100 Millionen Jahre Entstehung der ersten Galaxien

13,8 Milliarden Jahre Heute





Abbildungsnachweis: D. Baumann, arXiv:0907.5424v2

(Mehr Details an der Tafel)

Die Zukunft des Universums

- ▶ Falls die gegenwärtige Beschleunigung von einer **Kosmologischen Konstante** herrührt: Universum expandiert für immer und ewig und wird immer „leerer“
 - ▶ nach ca. 100 Milliarden Jahren könnten wir nur noch unsere Milchstraße sehen (die dann mit dem Andromedanebel verschmolzen sein wird);
 - ▶ allerdings wird die Erde bereits in etwa 7,6 Milliarden Jahren von der Sonne „verschluckt“
- ▶ Bei einer zeitlich veränderlichen **Dunklen Energie** sind andere Möglichkeiten denkbar:
 - ▶ „**Großer Riß**“: Das Universum wird in endlicher Zeit unendlich groß
 - ▶ „**Große Bremse**“: Universum bremst in der Zukunft unendlich schnell ab und ändert seine Größe dann nicht mehr

- ▶ E. Harrison, *Cosmology* (Cambridge University Press)
- ▶ V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press)
- ▶ G. Calcagni, *Classical and Quantum Cosmology* (Springer)