

Gravitation und Kosmologie

I: Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

Claus Kiefer

Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln



1. Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie
2. Friedmann-Lemaître-Modelle
3. Das inflationäre Universum
4. Quantengravitation und Quantenkosmologie

Inhalt von Teil I

Newtonsche Gravitation

Die Grundgedanken der Allgemeinen Relativitätstheorie

Einstein-Gleichungen

Schwarzschild-Metrik und klassische Tests

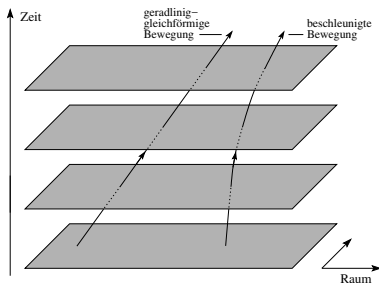
Gravitationswellen und Schwarze Löcher

Max Born (1955):

The foundation of general relativity appeared to me, and it still does, the greatest feat of human thinking about Nature, the most amazing combination of philosophical penetration, physical intuition and mathematical skill.

. . . the importance of general relativity lies in the revolution which it has produced in *cosmology*. It started in 1917 when EINSTEIN generalised his field equations by adding the so-called cosmological term and showed that a solution exists representing a closed universe. This suggestion of a finite, but unbounded space is one of the very greatest ideas about the nature of the world which ever have been conceived.

Absolute Zeit und absoluter Raum



Isaac Newton 1687:

Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich. . . . Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig, und ohne Beziehung auf irgend einen äußeren Gegenstand.

Nachweis des absoluten Raums?

- ▶ **Newton's Eimerexperiment**: Paraboloidform des Wassers im Eimer hängt nicht von der Relativbewegung zwischen Wasser und Eimer ab; für Newton bezieht sich die Drehung auf den absoluten Raum.
- ▶ **Ernst Mach** (1872): Verursacht nicht durch Relativdrehung zum absoluten Raum, sondern zur „Masse der Erde und der übrigen Himmelskörper“.

Das Gesetz der universellen Gravitation

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Der Wert und die physikalische Einheit der Newtonschen Gravitationskonstante ist $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, wobei der Wert der relativen Unsicherheit etwa $5 \cdot 10^{-5}$ beträgt.

Fernwirkungsgesetz (keine Gravitationswellen!)

Hiermit lassen sich die Keplerschen Gesetze ableiten und somit dynamisch begründen.

Newton an Bentley, 25.2.1692:

Es ist undenkbar, dass rohe unbelebte Materie ohne die Vermittlung von etwas anderem, das nicht materiell ist und ohne direkte Berührung auf andere Materie wirkt und sie beeinflusst [...]. Deshalb wünschte ich auch, dass Sie mir die Idee einer der Materie inhärenten Gravitation nicht zuschreiben würden. Dass die Gravitation inhärent und der Materie angeboren sei, und dass ein Körper auf einen anderen über die Ferne [acting at a distance] durch das Vakuum hindurch wirkt, ohne dass etwas anderes vorhanden wäre, das diese Wirkung oder Kraft von einem zum anderen Körper transportiert, stellt für mich eine so große Absurdität dar, dass ich nicht glaube, dass jemand der in philosophischen Dingen auch nur einigermaßen kompetent denken kann [any competent faculty of thinking], jemals darauf verfallen würde. Die Gravitationwechselwirkung wird durch einen Vermittler verursacht, der unablässig gemäß gewisser Gesetze wirkt, aber ob dieser Vermittler materiell oder immateriell ist, habe ich der Beurteilung meiner Leser [der Principia] überlassen.

Leibniz an Clarke (1715/16):

Man gibt mir das wichtige Prinzip zu: daß sich nichts ereignet, ohne daß ein zureichender Grund vorliegt, weshalb es sich eher so als anders verhält. . . .

Ich habe mehrfach betont, daß ich den Raum ebenso wie die Zeit für etwas rein Relatives halte; für eine Ordnung der Existenzen im Beisammen, wie die Zeit eine Ordnung des Nacheinander ist. . . .

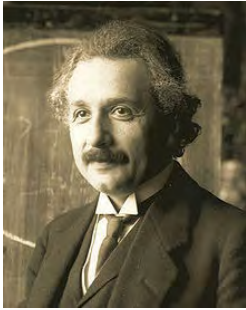
Ich behaupte also, daß, wenn der Raum ein absolutes Wesen wäre, sich etwas ereignen würde, wofür sich unmöglich ein zureichender Grund angeben ließe . . .

Aber eben das beweist, daß die Augenblicke losgelöst von den Dingen Nichts sind, und daß sie nur in der successiven Ordnung der Dinge selbst ihren Bestand haben.

Einstein faßte 1916 die wesentlichen Schritte zu seiner Theorie wie folgt zusammen:

- ▶ 1907: Grundgedanke für die Allgemeine Relativitätstheorie
- ▶ 1912: Erkenntnis der nicht-euklidischen Natur der Merik und der physikalischen Bedingtheit derselben durch die Gravitation
- ▶ 1915: Feldgleichungen der Gravitation. Erklärung der Periheldrehung des Merkur.

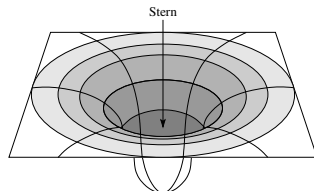
(Details an der Tafel)



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}$$

Albert Einstein (1915/1917)

Schwarzschild-Metrik



$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Schwarzschild-Radius: $R_S := \frac{2GM}{c^2}$

Die klassischen Tests

- ▶ Gravitative Rotverschiebung (Zeitdilatation): folgt bereits aus dem Äquivalenzprinzip

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gh}{c^2};$$

- ▶ Lichtablenkung / Gravitationslinsen

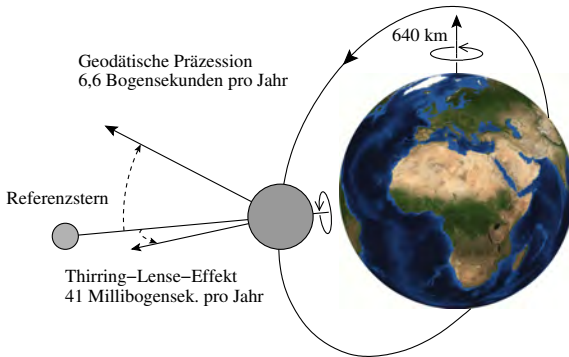
$$\delta = \frac{4GM}{Rc^2} \equiv \frac{2R_S}{R};$$

am Sonnenrand: $\delta \approx 1.75''$

- ▶ Periheldrehung des Merkur (und anderer Himmelskörper)

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1 - \epsilon^2)c^2} \equiv \frac{3\pi R_S}{a(1 - \epsilon^2)};$$

Merkur: $\Delta\phi \approx 42,98''$ pro Jahrhundert



Abbildungsnachweis: C. Kiefer, Der Quantenkosmos

Linearized gravity

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

The field equations of linearized gravity can be obtained from the Fierz–Pauli Lagrangian (1939) (here, $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$):

$$\mathcal{L} = \frac{c^4}{64\pi G} (h^{\mu\nu,\sigma} h_{\mu\nu,\sigma} - h^{\mu\nu,\sigma} h_{\sigma\nu,\mu} - h^{\nu\mu,\sigma} h_{\sigma\mu,\nu} - h^{\mu}_{\mu,\nu} h^{\rho}_{\rho,\nu} + 2h^{\rho\nu}_{,\nu} h^{\sigma}_{\sigma,\rho}) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$$

This leads to a **wave equation** for the $h_{\mu\nu}$!

Heisenberg to Pauli, August 1939:

Die Gravitationsquanten vom Spin 2 haben mir Spaß gemacht.

Emission of gravitational waves

Assuming non-relativistic motion of the source, long wavelengths, and large distance, one arrives at the *quadrupole formula* (Einstein 1916, 1918)

$$L_{\text{GW}} \equiv -\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \sum_{k,l=1}^3 \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl},$$

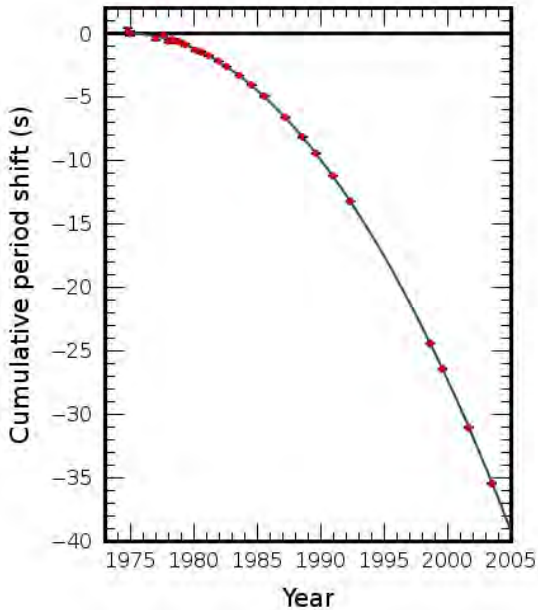
where

$$Q_{kl} = \int d^3x \left(x_k x_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} r^2 \right) \rho(\mathbf{x})$$

is the **quadrupole tensor**. There is **no** dipole contribution.

Estimates

- ▶ Rotating rod in the laboratory has $L_{\text{GW}} < 10^{-37}$ Watt
- ▶ International Space Station has $L_{\text{GW}} \sim 10^{-30}$ Watt
- ▶ Earth around the Sun: 200 Watt;
Jupiter around the Sun: 10^3 Watt
- ▶ GW150914: peak gravitational-wave luminosity is $3.6_{-0.4}^{+0.5} \times 10^{49}$ Watt, equivalent to $200_{-20}^{+30} M_{\odot} c^2/s$



Orbital decay of PSR B1913+16 (From Weisberg and Taylor 2004)

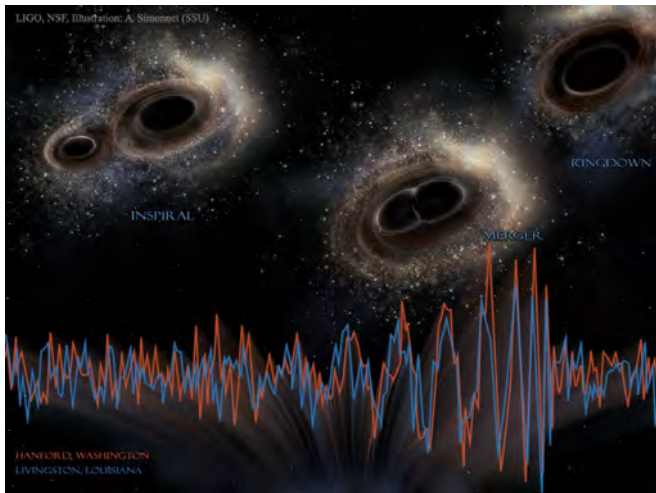
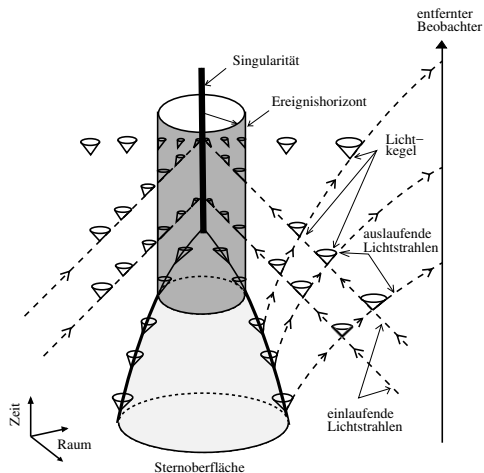


Figure credit: LIGO, NSF, Aurore Simonnet

Albert Einstein (1916):

Gleichwohl müßten die Atome zufolge der inneratomischen Elektronenbewegung nicht nur elektromagnetische, sondern auch Gravitationsenergie ausstrahlen, wenn auch in winzigem Betrage. Da dies in Wahrheit in der Natur nicht zutreffen dürfte, so scheint es, daß die Quantentheorie nicht nur die Maxwellsche Elektrodynamik, sondern auch die neue Gravitationstheorie wird modifizieren müssen.

Collapse to a black hole



Event horizon at $R_S = \frac{2GM}{c^2}$
(Schwarzschild radius)



A simulated black hole of 10 solar masses against the Milky Way background, seen from a distance of 600 km.

(Figure credit: Ute Kraus/Tübingen)

No-hair theorem

Stationary black holes within Einstein-Maxwell theory are **uniquely** characterized by **three** parameters:

- ▶ Mass M
- ▶ Angular momentum J
- ▶ Electric charge q

The most general solution is the **Kerr–Newman solution**. Of main astrophysical significance is the **Kerr solution**, which is completely characterized by J and q .

- ▶ W. Rindler, *Relativitätstheorie* (Wiley-VCH)
- ▶ J. B. Hartle, *Gravity* (Addison-Wesley)
- ▶ C. Kiefer, *Der Quantenkosmos* (S. Fischer)

Heraeus seminar über

Hundred years of gauge theories

Bad Honnef, 30.7.–3.8.2018

Claus KIEFER

Institut für Theoretische Physik,
Universität zu Köln

Silvia DE BIANCHI

Department of Philosophy and Centre for the History of
Science, Autonomous University of Barcelona

Redner:

Jeremy Butterfield (Cambridge), Alexander Blum (Berlin), Gabriel Catren (Paris), Laura Covi (Göttingen), Dennis Dieks (Utrecht), Brigitte Falkenburg (Dortmund), Domenico Giulini (Hannover), Friedrich Hehl (Köln), Eleanor Knox (London), Dennis Lehmkuhl (Caltech), Hans-Peter Nilles (Bonn), Carlo Rovelli (Marseille), Thomas Ryckman (Stanford), Erhard Scholz (Wuppertal), Thomas Schücker (Marseille), Johanna Stachel (Heidelberg), Norbert Straumann (Zürich) Gerard 't Hooft (Utrecht), Francesca Vidotto (Nijmegen), Christof Wetterich (Heidelberg)

Homepage spätestens im November online